



TITLE:

有限群のSK\$_1\$について(群の整数表現及び関連する問題の研究)

AUTHOR(S):

大林, 忠夫

CITATION:

大林, 忠夫. 有限群のSK\$_1\$について(群の整数表現及び関連する問題の研究). 数理解析研究所講究録 1985, 549: 73-94

ISSUE DATE:

1985-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98871>

RIGHT:

有限群の SK_1 について

信州大教養部 大林忠夫 (Tadao Obayashi)

序. 有限可換群 π の特殊 K_1 -群 $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$ は, 合同部分群問題の解決 (Bass-Milnor-Serre [3]) の成果に基づいて, Dennis, Stein 等により詳しく調べられている (Stein の総合報告 [16] を参照). また最近, surgery 理論に関連しての Wall による $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$ の研究や, Rehman-Stukler, Bak 等による非可換環の K_2 -群の研究を背景にして, Oliver は非可換有限群に対する $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$ の研究を大きく前進させた.

この講演では, "SK₁ on finite group rings" と題された Oliver の一連の論文 (引用文献参照) の概要を紹介する.

§1. 代数的 K -理論からの準備.

環 A 上の一般線形群を $GL_n(A)$, 基本行列 $E_{ij}(a)$ 全体で生成される部分群を $E_n(A)$ とし, $GL(A) = \varinjlim GL_n(A)$, $E(A) = \varinjlim E_n(A)$ とおくと, 交換子群に対し, $E(A) = [E(A), E(A)] = [GL(A), GL(A)]$ となる.

A 上の K_i -群 ($i=1, 2$) は次によって定義される.

$$K_1(A) = H_1(GL(A)) \quad (\cong GL(A)/E(A))$$

$$K_2(A) = H_2(E(A))$$

K_i は環の圏から、可換群の圏への covariant な関手を作る。

可換環 A に対しては、通常 of 行列式から定義される写像

$\det: K_1(A) \rightarrow A^*$ (A の単数群) は split する。

$$K_1(A) \cong A^* \oplus SK_1(A) \quad (SK_1(A) = \ker(\det)).$$

特に (可換) 体 F に対し、 $K_1(F) \cong F^*$ 。また、可換半局所環

や代数体の整数環 A に対しても、 $K_1(A) \cong A^*$ であることが知ら

れている ([3], Bass [2])。

$B = M_n(D)$ が体 F 上の中心の単純多元環ならば、Dindoane determinant によって、 $K_1(B) \cong B^*/[B^*, B^*] \cong D^*/[D^*, D^*]$ となる。

また、被約ノルムによつて、写像 $\text{nr}_B: K_1(B) \rightarrow F^*$ が定義される。これは、 B が半単純多元環の場合にも拡張される。

F を Dedekind 整域 R の商体とし、 B を F 上の半単純多元環とする。 B の R -order A に対して

$$SK_1(A) = \ker [\text{nr}_A: K_1(A) \rightarrow K_1(B) \xrightarrow{\text{nr}_B} R(B)^*] \quad (R(B) = B \text{ の中心})$$

と定義する。 R が代数体または p -進体の整数環ならば、 nr_B

は injective 故に $SK_1(A) = \ker [K_1(A) \rightarrow K_1(B)]$ であり、このとき、

$SK_1(A)$ は有限群である ([2], Wall [17])。

Dedekind 整域 R の標数が 0 のとき、有限群 π の R 上の群環

$R\pi$ に対して、 $K(R\pi) = \text{Im}(\text{nr}_{R\pi})$ とおくと、完全列の injection

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & SK_1(R) & \longrightarrow & K_1(R) \oplus \pi^{ab} & \longrightarrow & R^* \oplus \pi^{ab} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma = \text{urd} \\
0 & \longrightarrow & SK_1(R\pi) & \longrightarrow & K_1(R\pi) & \xrightarrow{\text{urd}} & K_1'(R\pi) \longrightarrow 0
\end{array}$$

が存在する。そこで, $Wh(R\pi) = \text{Coker}(\beta)$, $Wh'(R\pi) = \text{Coker}(\gamma)$ であり、完全列 $0 \rightarrow \text{Coker}(\alpha) \rightarrow Wh(R\pi) \rightarrow Wh'(R\pi) \rightarrow 0$ が得られる。特に R が代数的または p 進的の整数環の場合は, $Wh'(R\pi)$ は *torsion free* である (Wall [18])。このときは, $SK_1(R) = 0$ で、また $SK_1(R\pi)$ は有限群だから, $SK_1(R\pi)$ が $Wh(R\pi)$ の *torsion part* をなす。 $Wh(\mathbb{Z}\pi)$ は π の Whitehead 群と呼ばれてゐるもので、その幾何学的意義については、松田氏の講演を参照されたい。

任意の環 A に対して, $E(A)$ は *perfect* 群であるから, $K_2(A) = H_2(E(A))$ は, $E(A)$ の普通中心拡大の kernel に同型である。記号 $x_{ij}(a)$ ($1 \leq i \neq j \leq n$, $a \in A$) を生成元, $x_{ij}(a+b) = x_{ij}(a)x_{ij}(b)$, $[x_{ij}(a), x_{kl}(b)] = 1$ ($i \neq l, j \neq k$), $[x_{ij}(a), x_{je}(b)] = x_{ie}(ab)$ ($i \neq l$) と基本関係として定義される群を $St_n(A)$ とすると,

$$St(A) = \varinjlim St_n(A) \xrightarrow{\varphi} E(A) \quad (x_{ij}(a) \mapsto e_{ij}(a))$$

は普通中心拡大となり, したがって $K_2(A) \cong \ker(\varphi)$ である。

$A^* \ni a$ に對し, $w_{ij}(a) = x_{ij}(a)x_{ji}(-a')x_{ij}(a)$, $h_{ij}(a) = w_{ij}(a)w_{ij}(-1)$ とおき, $A^* \times A^* \ni (a, b)$ に對し

$$c^A(a, b) = h_{12}(a)h_{12}(b)h_{12}(ba)^{-1}$$

と定めると, $\varphi(c^A(a, b)) = \begin{pmatrix} a b a^{-1} b^{-1} & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ である。よって,

$ab=ba$ ならば, $c^A(a, a) \in K_2(A)$ となる。

一般に, 可換群 \mathcal{S} に値をとる行 F 上の双乗法的写像

$c: F^* \times F^* \rightarrow \mathcal{S}$ がさらに $c(a, 1-a) = 1$ ($a, 1-a \in A^*$) を満たすとき, F 上の *symbol* と呼ばれる。 $c^F: F^* \times F^* \rightarrow K_2(F)$ は F 上の普通 *symbol* である (Matsumoto [8])。

B が行 F 上の中心的単純多元環ならば, $c^B: F^* \times B^* \rightarrow K_2(B)$ から, 写像 $\bar{c}^B: F^* \times B^*/[B^*, B^*] \rightarrow K_2(B)$ が得られる。

右図に, nrdb が *bijective* になる

場合は, 写像 $\bar{c}^B \circ \text{nrdb}^{-1}: F^* \times F^* \rightarrow K_2(B)$

は F 上の *symbol* であり, よって

$$\begin{array}{ccc} F^* \times B^*/[B^*, B^*] & \xrightarrow{\bar{c}^B} & K_2(B) \\ \uparrow \eta & & \uparrow \psi \\ F^* \times K_1(B) & & \\ \downarrow \text{nrdb} & \xrightarrow{c^F} & K_2(F) \\ F^* \times F^* & & \end{array}$$

図を可換にする準同型 $\psi: K_2(F) \rightarrow K_2(B)$ が一意的に定まる。

特に, B が p -進行 \mathbb{Q}_p 上の単純多元環ならば, nrdb は *bijective* であり, ψ が定まるが, このとき ψ は *surjective* になる (Rehman-Stuhler [14], Bak)。

環 A の ideal \mathcal{O} に対して, $GL_n(A, \mathcal{O}) = \ker [GL_n(A) \rightarrow GL_n(A/\mathcal{O})]$, 基本行列 $E_{ij}(a)$ ($a \in \mathcal{O}$) 全体で生成された $GL_n(A)$ の正規部分群を $E_n(A, \mathcal{O})$ とし, $GL(A, \mathcal{O}) = \varinjlim GL_n(A, \mathcal{O})$, $E(A, \mathcal{O}) = \varinjlim E_n(A, \mathcal{O})$ とおくと, $E(A, \mathcal{O}) = [GL(A), GL(A, \mathcal{O})]$ が成り立つ。よって, 可換群 $SK_1(A, \mathcal{O}) = GL(A, \mathcal{O})/E(A, \mathcal{O})$ が定義される。 $SK_1(A)$ が考えられる場合は, $SK_1(A) = SL(A)/E(A)$ なる $GL(A)$ の正規部分群 $SL(A)$ に対して $SL(A, \mathcal{O}) = SL(A) \cap GL(A, \mathcal{O})$ において,

可換群 $SK_1(A, \mathcal{O}) = SL(A, \mathcal{O})/E(A, \mathcal{O})$ を定義する。このとき、次の完全列が得られる。

$$K_2(A) \rightarrow K_2(A/\mathcal{O}) \rightarrow SK_1(A, \mathcal{O}) \rightarrow SK_1(A) \rightarrow SK_1(A/\mathcal{O})$$

特に A が代数体の整数環の場合は、 $SK_1(A, \mathcal{O})$ の構造は完全に決定されている ([3])。

右を環の pullback 図とする。 f_2 または g_2 が surjective のとき、環の cartesian square と呼ぶことにする。また、右が位相環の pullback 図で、 f_i が open, g_i が open かつ dense であるとき、環の approximation square という。環の cartesian square, または approximation square から、次の Mayer-Vietoris の完全列が得られる (詳しくは, Bak [1] 参照)。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & B \\ \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 \\ C & \xrightarrow{f_2} & D \end{array}$$

$$K_2(A) \rightarrow K_2(B) \oplus K_2(C) \rightarrow K_2(D) \xrightarrow{\partial} K_1(A) \rightarrow K_1(B) \oplus K_1(C) \rightarrow K_1(D)$$

5.2. \mathbb{Q}_p -群とその構造.

\mathbb{Q} を有理数体, \mathbb{Q}_p を p 進体とする。以下では、 \mathbb{Q} , \mathbb{Q}_p の有限次拡大体と各々 n 体, p 体 といひ、その整数環と n 環, p 環 と呼ぶことにする。 R が \mathbb{Q} の部分環のとき、 \mathbb{Q} 上の半単純多元環 B とその R -order A に対し、 $\widehat{A}_p = A \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}_p$, $\widehat{B}_p = B \otimes_{\mathbb{Q}} \widehat{\mathbb{Q}}_p$ とおく。 approximation square

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \prod_p \hat{A}_p & \longrightarrow & \prod_p (\hat{B}_p, \hat{A}_p) \text{ (制限直積)},
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & A[\frac{1}{p}] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \hat{A}_p & \longrightarrow & \hat{B}_p
 \end{array}$$

に、各々 Mayer-Vietoris を適用して、次の完全列を得る。

補題 1.

$$(1) \quad K_2(B) \rightarrow \sum_p \operatorname{Coker}[K_2(\hat{A}_p) \rightarrow K_2(\hat{B}_p)] \xrightarrow{\partial} SK_1(A) \rightarrow \sum_p SK_1(\hat{A}_p) \rightarrow 0$$

$$(2) \quad K_2(A[\frac{1}{p}]) \oplus K_2(\hat{A}_p) \rightarrow K_2(\hat{B}_p) \xrightarrow{\partial_p} SK_1(A) \rightarrow SK_1(A[\frac{1}{p}]) \oplus SK_1(\hat{A}_p) \rightarrow 0$$

そこで、(A の類群 $cl(A)$ に倣って) 次のように定義する。

$$cl_1(A) = \operatorname{Im}(\partial) = \ker[SK_1(A) \rightarrow \sum_p SK_1(\hat{A}_p)]$$

$SK_1(A)$ は $cl_1(A)$ と局所的な場合の SK_1 の研究に帰着される。

後者に関しては、群環の場合次のことが知られている。

定理 2 (Wall [17]). p 環 R と有限群 π に対して

(1) $SK_1(R\pi)$ は (有限) p 群 である。

(2) π の Sylow p 部分群 π_p が可換ならば、 $SK_1(R\pi) = 0$ 。

特に π が可換群ならば、任意の n 環 R に対して、 $SK_1(R\pi) = 0$

($\forall p$) となり、 $cl_1(R\pi) = SK_1(R\pi)$ が成り立つ。

cl_1 の研究は、 K_2 -群の研究に帰着される。

補題 3. (1) $\varphi: B \rightarrow B'$ が \mathbb{Q} 上の半単純多元環の surjection

ならば、 $\varphi(A) \subseteq A'$ なる B, B' の R -order A, A' に対し、

$\varphi_*: cl_1(A) \rightarrow cl_1(A')$ は surjective である。

(2) $A \subseteq A'$ を B の R -order, $\alpha \in A$ に含まれる A' の最大の

ideal とする。 $p \nmid \alpha$ ならば、 p 成分について

$cl_1(A)_{(p)} \cong cl_1(A')_{(p)}$ が成り立つ。

(証明) (1) 任意の p に対して, $K_2(\widehat{B}_p) \rightarrow K_2(\widehat{B}'_p)$ は surjective だから, 補題 1 の (1) より明らか。 (2) (1) より $cl_1(A)_{(p)} \rightarrow cl_1(A')_{(p)}$ は surjective. $p \nmid \alpha$ より, A/α は位数が p と素な有限環だから $K_2(A/\alpha)$ の位数も p と素である。

よって, 左の cartesian square に,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/\alpha & \longrightarrow & A'/\alpha \end{array}$$

Mayer-Vietoris を適用して, $cl_1(A)_{(p)} \rightarrow cl_1(A')_{(p)}$ の injectivity がいえる。

cl_1 の p 成分については, 一般に次が成り立つ。

補題 4

(1) \mathbb{Q} 上の半単純多元環 B の R -order A に対して, $A[\frac{1}{p}]$ の各単純成分への像が hereditary ならば

$$K_2(A[\frac{1}{p}])_{(p)} \oplus K_2(\widehat{A}_p)_{(p)} \rightarrow K_2(\widehat{B}_p)_{(p)} \xrightarrow{\partial_p} cl_1(A)_{(p)} \rightarrow 0 \quad (\text{完全})$$

(2) 特に, 有限群 π の n 環上の群環 $R\pi$ に対しては

$$K_2(R[\frac{1}{p}]\pi)_{(p)} \oplus K_2(\widehat{R}_p\pi)_{(p)} \rightarrow K_2(\widehat{R}_p\pi)_{(p)} \xrightarrow{\partial_p} cl_1(R\pi)_{(p)} \rightarrow 0 \quad (\text{完全})$$

(証明) maximal order に対しては $cl_1 = 0$ となる (Keating [6])

ことから, hereditary order に対しても $cl_1 = 0$ が導かれるので,

$cl_1(A[\frac{1}{p}])_{(p)} = 0$ である。よって, 補題 1, (2) より, (1) を得る。

(2) についても, $cl_1(R[\frac{1}{p}]\pi)_{(p)} = 0$ をいえる。一般に,

$K_1(R\pi)_{(p)}$, $Wh(R\pi)_{(p)}$, $SK_1(R\pi)_{(p)}$, しなかく $cl_1(R\pi)_{(p)}$ に

対して, Witt の誘導定理が成り立つ。よって, π は p -

H -elementary としてよい。このとき, $R[\frac{1}{p}]\pi$ の各単純成分

\wedge の像は *hereditary* となり, (1) から (2) が示される。

π は任意の有限群で, B は $\mathbb{Q}\pi$ の単純成分とする。また, R を B の中心 H の整数環とする。任意の素数 p に対して, $\hat{\psi}: K_2(\hat{R}_p) \rightarrow K_2(\hat{B}_p)$ が定義され, それは *surjective* である (§1).
もしも π が *Eichler* 条件を満たす ($R\pi$ の単純成分の *division* に 4 元数体が現われないう) ならば, nr_B は *bijective*. よって $\psi: K_2(H) \rightarrow K_2(B)$ が定義され, 次の可換図を得る。

$$\begin{array}{ccccc} K_2(R) & \xrightarrow{\alpha} & K_2(H) & \xrightarrow{\psi} & K_2(B) \\ \downarrow \beta & & \downarrow & & \downarrow \\ K_2(\hat{R}_p) & \xrightarrow{\gamma} & K_2^*(\hat{R}_p)_{(p)} & \xrightarrow{\hat{\psi}} & K_2^*(\hat{B}_p)_{(p)} \end{array}$$

(ただし, $K_2^*(\) = K_2(\) / (\text{divisible})$). Dennis-Stein ([4]) より, γ は *surjective* で, かつ十分大きな n に対して, $K_2(\hat{R}_p) \cong K_2(R/p^n)$.
よって, $\text{Coker}(\beta) \cong SK_1(R, p^n R)$. ここでさらに, H が *not totally imaginary* ならば, $SK_1(R, p^n R) = 0$ ([3]) より, β も *surjective* になる。すなわち, 任意の p に対して, $K_2(R) \xrightarrow{\psi \circ \alpha} K_2(B) \rightarrow K_2^*(\hat{B}_p)_{(p)}$ は *surjective* である。よって, 写像

$$\text{Ker} [K_2(B) \rightarrow \sum_{p \neq p} K_2^*(\hat{B}_p)_{(p)}] \rightarrow K_2^*(\hat{B}_p)_{(p)}$$

は *surjective* となり, 補題 1, (1) と 補題 4, (2) の完全列より,

$$cl_1(\mathbb{Z}\pi)_{(p)} = 0 \quad (\forall p), \quad \text{したがって, } cl_1(\mathbb{Z}\pi) = 0 \quad \text{となる。特}$$

に次の場合は, 上の諸条件が満たされる。

定理 5 π の絶対既約表現がすべて実数体 \mathbb{R} で実現される

ならば, $cl_1(\mathbb{Z}\pi) = 0$.

特に、対称群 S_n , dihedral 2-群 $D(2^n)$ に対して

$$cl_1(\mathbb{Z}S_n) = cl_1(\mathbb{Z}D(2^n)) = 0.$$

cl_1 に対して, Witt の誘導定理 より強い, Brauer の誘導定理 が成り立つ。 R を n 環, F を その商環 とする。有限群 π の p -elementary な部分群 全列 の類 を \mathcal{E}_p とすると

定理 6. (1) $cl_1(R\pi)_{(p)} = \sum_{\pi \in \mathcal{E}_p} \text{Im} [cl_1(R\pi)_{(p)} \rightarrow cl_1(R\pi)_{(p)}]$

(2) p -elementary な群 $\mathbb{Z}_n \times \pi$ (π : p 群, $p \nmid n$) に対して,

$$F\mathbb{Z}_n = \sum F_i, \quad R_i = F_i \text{ の整数環 とすると}$$

$$cl_1(R[\mathbb{Z}_n \times \pi])_{(p)} \cong \sum cl_1(R_i \pi)_{(p)}$$

(証明) (2) は 補題 3 の (2). (1) は Witt の誘導定理 と 補題 4

の完全列より, p 群 π が K/F の Galois automorphism とし

て作用してゐるとき, $K_2(\hat{K}_p[\rho]) \rightarrow K_2(\hat{K}_p[\pi]^\dagger)$ (ただし,

ρ は π の作用の kernel で, $\hat{K}_p[\pi]^\dagger$ は twisted p -群環) の

surjectivity に帰着される。ここで inclusion $\hat{K}_p[\rho] \hookrightarrow \hat{K}_p[\pi]^\dagger$

が同一の極大部分環 E を有する単純環 $A \subseteq B$ による対

角写像 $A^\dagger \rightarrow M_2(B)$ の形の組で表されること, かつ \mathbb{Q}_p 上

の単純多元環 A の極大部分環 E に対して, $K_2(E) \rightarrow K_2(A)$

が surjective になることから, $K_2(\hat{K}_p[\rho]) \rightarrow K_2(\hat{K}_p[\pi]^\dagger)$ の

surjectivity が示される。

π の Sylow p 群 π_p が可換ならば, $SK_1(\mathbb{Z}\pi) = 0$ (定理 2) より

$SK_1(\mathbb{Z}\pi)_{(p)} = cl_1(\mathbb{Z}\pi)_{(p)}$. また, p が不分岐な n 環 R に対して,

$SK_1(R\mathbb{Z}_p^n) = SK_1(R[\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^n]) = 0$ となることが分っている ([2]) ので、上定理より可換群の場合の Bass の結果 ([2]) が非可換群に拡張される。

系. $\pi_p \cong \mathbb{Z}_p^n$ または $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^n$ ならば, $SK_1(\mathbb{Z}\pi)_p = 0$. 特に,

metacyclic 群 π に対して, $SK_1(\mathbb{Z}\pi) = 0$ である。

上誘導定理により, p 群 π と π 環 R (p は不分岐) に対する $\mathcal{C}_1(R\pi)$ が問題となる。まず, Milnor ([9]) による transfer 写像 $tr: K_1(R\pi) \rightarrow K_1(\mathbb{Z}\pi)$ から得られる $tr: \mathcal{C}_1(R\pi) \rightarrow \mathcal{C}_1(\mathbb{Z}\pi)$ は surjective であることが示される。また, $\mathcal{C}_1(\mathbb{Z}\pi) \rightarrow \mathcal{C}_1(\mathbb{Z}\pi^{ab})$ も surjective (補題3) だから, $\mathcal{C}_1(R\pi)$ の研究に可換 p 群 π の $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$ に関する諸結果 ([16]) が利用できる。

定理7. R が totally imaginary (2 は不分岐) なら, 2 群 π に対して

$$\mathcal{C}_1(R\pi) = 0 \iff \pi \cong \mathbb{Z}_2^n \text{ または } \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^n$$

(証明) $\mathcal{C}_1(R\pi) = 0$ とすると, 上の注意より $\mathcal{C}_1(\mathbb{Z}\pi^{ab}) = SK_1(\mathbb{Z}\pi^{ab}) = 0$

(したがって, π または $\pi^{ab} \cong \mathbb{Z}_2^k, (\mathbb{Z}_2)^k, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^m$ ([16])). 定

理の結果を得るには, 補題3 を用いて, $\pi \cong Q(8), D(8),$

$(\mathbb{Z}_2)^3$ のとき, $\mathcal{C}_1(R\pi) \neq 0$ を示すことに帰着されるが, こ

れは K_2 -群に関するやや複雑な計算によって確かめられる。

$R (\neq \mathbb{Z})$ が not totally imaginary の場合に, $\mathcal{C}_1(R\pi) = 0$ なる p 群 π を決定することは難かしいようである。ただし, dihedral 群 $D(2^n)$, quaternionic 群 $Q(2^n)$, semidihedral 群 $S(2^n)$ に対しては,

$SK_1(R, {}_2^*R)$ の構造に関する Bass-Milnor-Serre の結果 ([3]) と定理 7 より、次が成り立つ。

定理 8. R : n 環 (2 は不分割), $\pi \cong D(2^n), Q(2^n), S(2^n)$ のとき,

$$cl_1(R\pi) = 0 \quad (R: \text{not totally imaginary})$$

$$cl_1(R\pi) \cong \mathbb{Z}_2 \quad (R: \text{totally imaginary})$$

$R = \mathbb{Z}$ の場合は、非可換 p 群に対して次が示される。

定理 9. (1) $cl_1(\mathbb{Z}\pi) \neq 0$ (p : odd)

$$(2) \quad cl_1(\mathbb{Z}\pi) = 0 \Rightarrow \pi^{ab} \cong (\mathbb{Z}_2)^k \quad (p=2)$$

ここで、(2) の逆は一般には成り立たない。実際、 $\pi^{ab} \cong (\mathbb{Z}_2)^3$ となる非可換 2 群 π で、 $cl_1(\mathbb{Z}\pi) \neq 0$ となる例が得られる。

§3. SK_1 の局所的構造.

以下では、 π は p 群とし、 R は p 環とする。 R は p 進位相で完備な位相環である。群環 $R\pi$ は局所環であるから、 $R\pi^* = GL_1(R\pi) \xrightarrow{i} K_1(R\pi)$ は surjective である ([2])。特に、 $I = I(R\pi) = \ker[R\pi \rightarrow R]$ を augmentation ideal とすると、 $1+I \subseteq R\pi^*$ であり、 $Wh(R\pi)$ は $\uparrow(1+I)$ で生成され、また、 $K_1(R\pi, pI)$ は $\uparrow(1+pI)$ で生成される。

$$\bar{I} = I / \langle x - g x g^{-1} \mid x \in I, g \in \pi \rangle$$

とみると、 $p\bar{I}$, $K_1(R\pi, pI)$ は $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ -自由加群と見なされ、両者の階数は一致する。特に $K_1(R\pi, pI)$ は torsion free である。

pI と $1+pI$ においては, p 進指数関数, p 進対数関数

$$\text{Exp}(p\alpha) = 1 + p\alpha + \frac{p^2}{2!}\alpha^2 + \frac{p^3}{3!}\alpha^3 + \dots \quad (\alpha \in I)$$

$$\text{Log}(1+p\alpha) = p\alpha - \frac{p^2}{2}\alpha^2 + \frac{p^3}{3}\alpha^3 - \dots \quad (\alpha \in I)$$

が定義され, 互に逆写像となる。特に, Exp は $1+pI \xrightarrow{\eta} K_1(R\pi, pI)$ を合成して, 同型

$$\exp: p\bar{I} \xrightarrow{\sim} K_1(R\pi, pI)$$

が得られる (群演算が保たれることは, $pI \ni \alpha, \beta$ に対して, torsion free な群 $K_1(R\pi, pI)$ においては, $(1+p^n\alpha)^{\frac{1}{p^n}}(1+p^n\beta)^{\frac{1}{p^n}} \equiv (1+p^n(\alpha+\beta))^{\frac{1}{p^n}} \pmod{p^n}$ が成り立つことと, $\text{Exp}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+p^n\alpha)^{\frac{1}{p^n}}$ であることからいえる)。

一方, 十分大きな n に対して $I^{\frac{1}{p^n}} \leq pI$ となるから, p 進対数 $\text{Log}: 1+I \rightarrow I \otimes \mathbb{Q}$ が定義される。したがって, そのような n を一つ定めると, $\text{Log}(1+\alpha) = \frac{1}{p^n} \text{Log}(1+\alpha)^{p^n}$ より次の可換図が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Log}: & 1+I & \xrightarrow{p^n \text{乗}} & 1+pI & \xrightarrow{\text{Exp}^{-1}=\text{Log}} & pI & \xrightarrow{\frac{1}{p^n} \text{倍}} & I \otimes \mathbb{Q} \\ & \downarrow \eta & & \downarrow \eta & & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{Wh}(R\pi) & \xrightarrow{p^n \text{乗}} & K_1(R\pi, pI) & \xrightarrow{\exp^{-1}} & p\bar{I} & \xrightarrow{\frac{1}{p^n} \text{倍}} & \bar{I} \otimes \mathbb{Q} \end{array}$$

下の写像の合成から, 導同型

$$\log: \text{Wh}(R\pi) \rightarrow \bar{I} \otimes \mathbb{Q}$$

が定義される。 $SK_1(R\pi)$ が $\text{Wh}(R\pi)$ の torsion part であることより, $\ker(\log) = SK_1(R\pi)$ となる。特に, $1+I \ni 1+\alpha$ に対して, $\eta(1+\alpha) \in SK_1(R\pi) \iff \text{Log}(1+\alpha) = 0 \text{ in } \bar{I} \otimes \mathbb{Q}$ 。この

判定条件と、やや複雑な考察から次の結果が得られるが、詳細は原論文を参照されたい。

定理 10. p 群 π に商群が巡回群となる可換正規部分群が存在すれば、任意の p 環 R に対して、 $SK_1(R\pi) = 0$ である。
特に、*dihedral*, *quaternionic*, *semidihedral* 2 群 π に対して、 $SK_1(\mathbb{Z}\pi) = 0$ 。よって、定理 8 から次が得られる。(一般の *dihedral* 群 $D(2n)$ に対して、 $SK_1(\mathbb{Z}D(2n)) = 0$ が Magurn [7] によって示されている)。

$$\text{系} \quad SK_1(\mathbb{Z}D(2^n)) = SK_1(\mathbb{Z}Q(2^n)) = SK_1(\mathbb{Z}S(2^n)) = 0.$$

ここでは、 $\log: WH(R\pi) \rightarrow \bar{I} \otimes \mathbb{Q}$ を用いて、 $SK_1(R\pi)$ の一般的表現を求めることについて説明しよう。不分岐な p 環 R に対して、 φ を R の Frobenius 置換: $\varphi(\lambda) \equiv \lambda^p \pmod{p}$ 、 $\Phi: \bar{I} \rightarrow \bar{I}$ を $\Phi(\sum \lambda_i g_i) = \sum \varphi(\lambda_i) g_i^p$ と定め、 \log を

$$\Gamma(u) = \log(u) - \frac{1}{p} \Phi(\log(u)) \quad (u \in WH(R\pi))$$

と修正すると、 $\text{Im}(\Gamma) \subseteq \bar{I}$ となる。また、 R の \mathbb{Z}_p に関する *trace* を用いて、写像 $\omega: \bar{I} \rightarrow \pi^{ab}$ を

$$\omega(\sum \lambda_i g_i) = \prod g_i^{\text{Tr}(\lambda_i)} \pmod{[\pi, \pi]}$$

と定めると、次の完全列が得られる。

$$\text{補題 11.} \quad 0 \rightarrow SK_1(R\pi) \rightarrow WH(R\pi) \xrightarrow{\Gamma} \bar{I} \xrightarrow{\omega} \pi^{ab} \rightarrow 0$$

さて、 p 群の拡大

$$1 \rightarrow \rho \rightarrow \tilde{\pi} \xrightarrow{\alpha} \pi \rightarrow 1$$

に対して、 $\text{Coker}[SK_1(R\tilde{\pi}) \rightarrow SK_1(R\pi)]$ は次のように記述さ

れる。 $R\rho, R\tilde{\pi}, R\pi$ に対する補題11の完全列のなす可換図に snake lemma を適用して, surjection

$$\Delta: \ker[\rho^{ab} \rightarrow \tilde{\pi}^{ab}] \rightarrow \text{Coker}[SK_1(R\tilde{\pi}) \rightarrow SK_1(R\pi)]$$

が得られる。 $\rho_0 = \rho \cap [\tilde{\pi}, \tilde{\pi}]$, $\rho_1 = \langle x \in \rho \mid x \text{ は } \tilde{\pi} \text{ の交換子} \rangle$ とおくと, $\rho_0 \rightarrow \ker[\rho^{ab} \rightarrow \tilde{\pi}^{ab}]$ に Δ を合成した写像は surjective で, ρ_1 がその kernel をなす。 すなわち, 同型

$$\kappa_\alpha: \rho/\rho_1 \cong \text{Coker}[SK_1(R\tilde{\pi}) \rightarrow SK_1(R\pi)]$$

が存在する。 一方, $H_2^{ab}(\pi)$ を π の可換部分群 π' の $H_2(\pi')$ 全体で生成された $H_2(\pi)$ の部分群とすると, $H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi)$ は, π の拡大に対する ρ/ρ_1 の普遍表示を与えらる (Stamback [15]) から, surjection $\delta_\alpha: H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi) \rightarrow \text{Coker}[SK_1(R\tilde{\pi}) \rightarrow SK_1(R\pi)]$ が存在する。 特に π の拡大で, ρ/ρ_1 が普遍表示をもつものが作れる ([15])。 よって, そのような拡大に対する同型

$$\delta_\alpha: H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi) \cong \text{Coker}[SK_1(R\tilde{\pi}) \rightarrow SK_1(R\pi)]$$

を通して, surjection $\theta_{R\pi}: SK_1(R\pi) \rightarrow H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi)$ が得られるが, これは拡大の選び方に依らないことが分る。

この $\theta_{R\pi}$ に関して, さらに

- (1) $\theta_{R\tilde{\pi}}$ が同型になる surjection $\tilde{\pi} \rightarrow \pi$ があれば, $\theta_{R\pi}$ も同型,
- (2) $SK_1(R\rho) = 0$ となる π の指数 p の正規部分群 ρ があれば,

$\theta_{R\pi}$ は同型

となることが示される。 これらの性質から, 任意の p 群 π に

対して $\theta_{R\pi}$ が同型になることが、帰納法で証明できる。

定理 12. 任意の p 群 π と不分岐 p 環 R に対して

$$\theta_{R\pi} : SK_1(R\pi) \cong H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi)$$

この定理は $SK_1(R\pi)$ の構造が、不分岐 p 環 R に無関係に決まることを示している。実際、一般に p 環の完全分岐な拡大 $R \subseteq R'$ に対しては、自然な写像 $SK_1(R\pi) \rightarrow SK_1(R'\pi)$ が同型となり、不分岐な拡大 $R \subseteq R'$ に対しては、 $\text{tr} : SK_1(R'\pi) \rightarrow SK_1(R\pi)$ が同型で、次の図が可換になることが示される。

$$\begin{array}{ccc} SK_1(R'\pi) & \xrightarrow{\theta_{R'\pi}} & H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi) \\ \downarrow \text{tr} & \nearrow \theta_{R\pi} & \\ SK_1(R\pi) & & \end{array}$$

上定理より、homology 群を調べて、次の諸結果が得られる。

系 π が次のいずれかの p 群のとき、 $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p\pi) = 0$ 。

- (1) $|\pi/\mathbb{Z}(\pi)| \leq p^3$ (2) π は商群が可換となる中心形巡回部分群をもつ (3) $|\pi| \leq 32$ ($p=2$)

($SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p\pi) \neq 0$ となる位数 p^5 (p odd) の群 π , また $SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi) \neq 0$ となる位数 64 の群の例が存在する。)

系 p 群に対して

$$(1) SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p[\pi_1 \times \pi_2]) \cong SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p\pi_1) \oplus SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p\pi_2)$$

$$(2) SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p[\pi] \wr \mathbb{Z}_p) \cong SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p\pi)$$

§4. 誘導定理

有限群 π と p 環 R の $SK_1(R\pi)$ に対して π , Brauer の誘導定理 (§2, 定理6 参照) が成り立つ。それを示すには, cl_1 の場合と同様に Wall の誘導定理から, π が p - R -elementary の場合に帰着される。すなわち, p 群 π から p 環の不分岐拡大 $R \subseteq S$ の Galois 群への準同型 $t: \pi \rightarrow Gal(S/R)$ が与えられたとき, $SK_1(SP) \rightarrow SK_1(S[\pi]^t)$ (ρ は t の kernel) が surjective であることを示せばよい。

まず, $S[\pi]^t$ の K_1 -群について, 次のことが成り立つ。

補題13. ρ に含まれる π の正規部分群 σ に対して

$$\ker[K_1(SP) \rightarrow K_1(S[\rho])] \rightarrow \ker[K_1(S[\pi]^t) \rightarrow K_1(S[\sigma]^t)] : \text{surjective}$$

これは, $\sigma = \langle x \rangle$, $x^p = 1$ の場合の $K_1(SP, (1-x)) \rightarrow K_1(S[\pi]^t, (1-x))$ の surjectivity に帰着させて証明される。その際, p 環 S 上の order A とその ideal \mathcal{O} に対する Wall の一般的な結果: $K_1(A, \mathcal{O}) = \varprojlim K_1(A/\mathcal{O}^{m_i}, \mathcal{O}^m/\mathcal{O}^{m_i})$ ([17]) が使われる。

上の補題で, 特に $\sigma = \rho$ とおくと, $S[\pi/\rho]^t$ が R 上の全行列環になることと, 不分岐拡大 $R \subseteq S$ の norm 写像 $S^* \rightarrow R^*$ が surjective であることから, $K_1(SP) \rightarrow K_1(S[\pi]^t)$ の surjectivity が得られる。 π の $K_1(SP)$ への自然な作用に関する cohomology 群を考察して, この surjectivity はさらに詳しく

$$H_0(\pi, K_1(SP)) \cong K_1(S[\pi]^t), \quad H_0(\pi, K_1'(SP)) \cong K_1'(S[\pi]^t)$$

と表わされ、かつ $K_1'(SP) \cong K_1(SP)/SK_1(SP)$ が cohomologically trivial であることが示される。よって、次が成り立つ。

補題 14 $H_0(\pi, SK_1(SP)) \cong SK_1(S[\pi]^t)$

特に、 $SK_1(SP) \rightarrow SK_1(S[\pi]^t)$ は surjective.

定理 15 $SK_1(R\pi)$ に対して、Brauer の誘導定理が成り立つ。

特に p -elementary な群 $\mathbb{Z}_n \times \pi$ ($\pi: p$ 群, $p \nmid n$) に対して

$R\mathbb{Z}_n = \sum R_i$ ($R_i: p$ 環) とおくと、

$$SK_1(R[\mathbb{Z}_n \times \pi]) \cong \sum SK_1(R_i \pi)$$

この誘導定理より、前節の係数環の拡大に関する結果は、一般の有限群の場合に拡張することができる。

定理 16 有限群 π に対して、 $R \subseteq R'$ が p 環の完全分岐拡大ならば、自然な写像 $SK_1(R\pi) \rightarrow SK_1(R'\pi)$ は同型であり、不

分岐拡大ならば、 $tr: SK_1(R'\pi) \rightarrow SK_1(R\pi)$ が同型を与える。

また、上の誘導定理と cl_1 に関する Brauer の誘導定理から、直ちに n 環についての誘導定理が得られる。

定理 17 任意の有限群 π と n 環 R の $SK_1(R\pi)$ に対して、

Brauer の誘導定理が成り立つ。

特に次の各群の elementary な部分群は、巡回群, $D(2^n)$, $Q(2^n)$ or $(\mathbb{Z}_2)^k$ の形であるから、定理 10 の系より、次が成り立つ。

系 $\pi \cong PSL(2, p)$, $SL(2, p)$ (p : 素数), $SL(2, 2^n)$ or $Q(4n)$ ならば、

$$SK_1(\mathbb{Z}\pi) = 0 \quad \text{である。}$$

誘導定理は、一般に Green 関手上の Green 加群の理論として位置づけられる (Dress [5]). 特に $SK_1(R\pi)$ は, Green 関手 $G_0(R\pi)$ ($R\pi$ の Grothendieck 環) 上の Green 加群である。この観点から, R が p 環の場合, $SK_1(R\pi)$ に関する Witt の誘導定理を以下に述べる形に書き直すことが出来る。

まず, R を標数 0 の Dedekind 整域とし, F を商域とする。 F 上の半単純多元環の R -order の圏から可換群の圏への ω -variant な関手 X で, 次の条件を満たすものを考える。

(1) 有限群 π に対して, $X(R\pi)$ は Green 加群で, ある素数 p に対して Witt の誘導定理が成り立つものとする。

(2) p - F -elementary な群 $\pi = \mathbb{Z}_m \rtimes \rho$ ($\rho: p$ 群, $p \nmid m$) に対して, $F\mathbb{Z}_m = \sum F_i$, $R_i = F_i$ における \mathbb{Z} の整閉包とすると,

$$X(R\pi) \cong \sum X(R_i[\rho]^t) \quad \text{が成り立つ。}$$

(3) 任意の p 群 ρ , p と素な同一の素因子をもつ任意の自然数 $m|n$ および任意の準同型 $\iota: \rho \rightarrow \text{Gal}(F(\zeta_m)/F) \cong \text{Gal}(F(\zeta_m)/F)$ (ζ_m は 1 の原始 m 乗根) に対して, 合成写像 $X(R[\zeta_m][\rho]^t) \rightarrow X(R[\zeta_m][\rho]^t) \xrightarrow{\text{tr}} X(R[\zeta_m][\rho]^t)$ は n/m 倍写像に一致する。

このとき, $\{g_1, \dots, g_k\}$ を π の p' 元の F -共役類の代表系とし, $N_\pi^\pi(g_i) = \{\alpha \in \pi \mid \alpha g_i \alpha^{-1} = g_i, \sigma \in \text{Gal}(F(\zeta_{p,i})/F)\}$ とおくと, Witt の誘導定理は, 次の形に表わせる。

$$X(R\pi) \cong \sum_{i=1}^k \varinjlim \{ X(R[S_{q_i}][p]^\dagger) \mid p \text{ は } p \leq N_\pi^F(q_i) \text{ なる } p\text{-群} \}$$

ここで、 \varinjlim は inclusion と $N_\pi^F(q_i)$ の元による共役写像に関する直極限である。条件(1)より、 $X(R\pi) = \varinjlim \{ X(R\pi) \mid \pi \leq \pi \text{ は } p\text{-F-elementary} \}$ と表わされるから、上の同型を得るには、(2)の分解を \varinjlim を保つように並べ直せばよい。それは条件(3)を用いてなされる。

特に、 R を予分岐 p 環とし、 R -order A に対し $X(A)$ として $SK_1(A)$ を考えると、条件(1)、(2)は成り立っている。また、twist τ の kernel を p' とすると、 $SK_1(R[S_n][p]^\dagger) \rightarrow SK_1(R[S_n][p]^\dagger)$ は surjective (補題14) で、 $SK_1(R[S_n][p]^\dagger)$ については(3)が成り立つので、 $SK_1(R[S_n][p]^\dagger)$ についても条件(3)が満たされる。したがって、 $SK_1(R\pi)$ に対する Witt の誘導定理は次のように表わされる。

$$(\star) \quad SK_1(R\pi) \cong \sum_{i=1}^k \varinjlim \{ SK_1(R[S_{q_i}][p]^\dagger) \mid p \leq N_\pi^F(q_i) \text{ は } p\text{-群} \}$$

そこで、twist の kernel を $p' = p \cap Z_\pi(q_i)$ (Z : 中心化群) とすると、 $SK_1(R[S_{q_i}][p]^\dagger) \cong H_0(p, SK_1(R[S_{q_i}][p]^\dagger))$ (補題14) で
また $SK_1(R[S_{q_i}][p]^\dagger) \cong H_2(p')/H_2^{\text{ad}}(p')$ (定理12) であるから、

(\star) の同型の右辺は

$$\sum_{i=1}^k \varinjlim \{ H_0(p, H_2(p')/H_2^{\text{ad}}(p')) \mid p \leq N_\pi^F(q_i) \text{ は } p\text{-群} \text{ で } p' = p \cap Z_\pi(q_i) \}$$

と表わされるが、ここで $H_2(\pi)/H_2^{\text{ad}}(\pi)$ も Green 加群であり、 p 部分群に関する誘導定理が成り立つことから、結局次の同型が得られる。

定理 18 R は不分岐 p 環で, F はその商体とする。 $\{g_1, \dots, g_k\}$

を有限群 π の p' 元の F 共役類の代表系とし, $N_i = N_F^\pi(g_i)$,

$Z_i = Z_\pi(g_i)$ とおくと, 次の同型が成り立つ。

$$SK_1(R\pi) \cong \sum_{i=1}^k H_0(N_i, H_2(Z_i)/H_2^{ab}(Z_i))$$

特に, 対称群 S_n , 交代群 A_n においては, 中心化群の構造はよく知られており, 任意の p に対して, $H_2(Z_i)/H_2^{ab}(Z_i) = 0$ となることが確かめられる。よって, 上定理より

$$\text{系} \quad \text{任意の } p \text{ に対して, } SK_1(\mathbb{Z}_p S_n) = SK_1(\mathbb{Z}_p A_n) = 0$$

一方, $cl_1(\mathbb{Z} S_n) = 0$ (定理 5) であるから, この系より

$$\text{系} \quad SK_1(\mathbb{Z} S_n) = 0$$

となる。

前節の補題 14 および本節の局所的議論は大部分が $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$ に拡張できるが, それについては原論文を参照していただくことにして, $SK_1(\mathbb{Z}A_n)$ に関する結果のみに付言しておく。

$$SK_1(\mathbb{Z}A_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_3 & , n = \sum_{i=1}^r 3^{m_i} \geq 27, m_1 > m_2 > \dots > m_r \geq 0, \sum m_i = \text{odd} \\ 0 & , \text{その他の場合} \end{cases}$$

References

1. Bak, A ; K-theory of forms, Ann.Math.Studies, No.98, 1981
2. Bass, H ; Algebraic K-theory, Benjamin, 1968
3. Bass, H-Milnor, J-Serre, J.P. ; Solution of the congruence subgroup problem for $SL_n(n \geq 3)$ and $Sp_{2n}(n \geq 2)$, I.H.E.S., vol.33, 59-137, 1967
4. Dennis, R.K-Stein, M ; K_2 of discrete valuation rings, Advances in Math., vol.18, 182-238, 1975
5. Dress, A ; Induction and structure theorems for orthogonal representations of finite groups, Ann.Math., vol.102, 291-325, 1975
6. Keating, M ; Values of tame symbols on division algebras, J.London Math.Soc., vol.14, 25-30, 1976
7. Magurn, B ; SK_1 of dihedral groups, J.Algebra, vol.51, 399-415, 1978
8. Matumoto, H ; Sur les sousgroupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés, Ann.Ecole Norm.Sup., vol.2, 1-62, 1969
9. Milnor, J ; Introduction to algebraic K-theory, Ann.Math.Studies, vol.72, 1971
10. Oliver, R ; SK_1 for finite group rings I, Invent.Math., vol.57, 183-204, 1980
11. ——— ; ——— II, Math.Scand., vol.47, 195-231, 1980
12. ——— ; ——— III, L.N.Springer, vol.854, 299-337, 1981
13. ——— ; ——— IV, Proc.London Math.Soc., vol.46, 1-37, 1983
14. Rehman, U-Stuhler, U ; On K_2 of finite dimensional division algebras over arithmetic fields, Invent.Math., vol.50, 75-90, 1978

15. Stambach, U ; Homology in group theory, L.N. Springer, vol. 359, 1973
16. Stein, M ; Whitehead groups of finite groups, Bull. A.M.S., vol. 84, 201-212, 1978
17. Wall, C.T.C ; On classification of hermetian forms III, Complete semilocal rings, Invent. Math., vol. 19, 59-71, 1973
18. ——— ; Norms of units in group rings, Proc. London Math. Soc., vol. 29, 593-632, 1974